Comparaciones Estocásticas y Clases de Envejecimiento en Sistemas con Mantenimiento

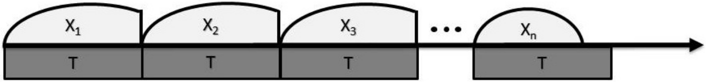
José E. Valdés

Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

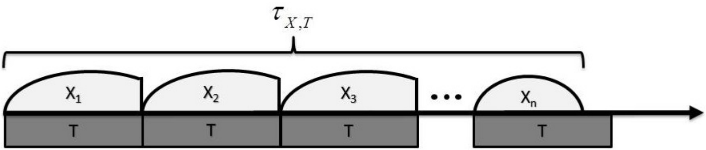
vcastro@matcom.uh.cu

March 8, 2018

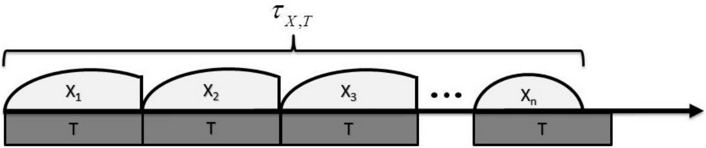
Modelo



Modelo



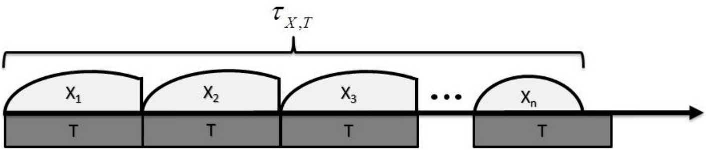
Modelo



Suposiciones

- X_i variables aleatorias no negativas i.i.d. para todo i.
- X_i tienen función de distribución $F(t)$, función de sobrevivencia $\overline{F}(t)$, densidad de probabilidad $f(t)$ y tasa de riesgo $\lambda(t)$.

Modelo

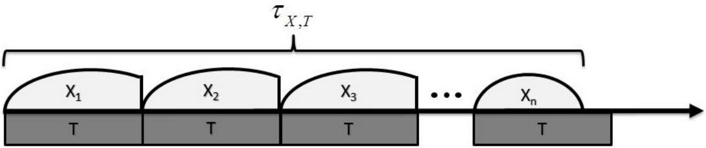


- $\tau_{X,T}$ tiene función de sobrevivencia:

$$\overline{F}_{X,T}(t) = [\overline{F}(T)]^{\lfloor t/T \rfloor} \overline{F}\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right),$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x.

Modelo



- $\tau_{X,T}$ tiene función de sobrevivencia:

$$\overline{F}_{X,T}(t) = [\overline{F}(T)]^{\lfloor t/T \rfloor}\overline{F}\left(t - \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor T\right),$$

  donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x.

- Además,

$$\mathbb{E}\left[\tau_{X,T}\right] = \frac{\int_0^T \overline{F}(x)dx}{F(T)}.$$

- $X \leq_{st} \tau_{X,T}$ para todo $T > 0$ si y solo si $X \in NBU$.
- $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}\tau_{X,T}$ para todo $T > 0$ si y solo si $X \in NBUE$.

- $X \leq_{st} \tau_{X,T}$ para todo $T > 0$ si y solo si $X \in NBU$.
- $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}\tau_{X,T}$ para todo $T > 0$ si y solo si $X \in NBUE$.

Cuestiones de interés:

- Relación entre la monotonía de $\mathbb{E}\left[\tau_{X,T}\right]$ en T y las clases de envejecimiento.

- $X \leq_{st} \tau_{X,T}$ para todo $T > 0$ si y solo si $X \in NBU$.
- $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}\tau_{X,T}$ para todo $T > 0$ si y solo si $X \in NBUE$.

Cuestiones de interés:

- Relación entre la monotonía de $\mathbb{E}\left[\tau_{X,T}\right]$ en T y las clases de envejecimiento.
- Investigar resultados análogos a los conocidos usando otros órdenes estocásticos.

- $X \leq_{st} \tau_{X,T}$ para todo $T > 0$ si y solo si $X \in NBU$.
- $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}\tau_{X,T}$ para todo $T > 0$ si y solo si $X \in NBUE$.

Cuestiones de interés:

- Relación entre la monotonía de $\mathbb{E}\left[\tau_{X,T}\right]$ en T y las clases de envejecimiento.
- Investigar resultados análogos a los conocidos usando otros órdenes estocásticos.
- Considerar el tiempo T aleatorio.

Proposición 1

Si $X \in IFR$, entonces $\tau_{X,T} \in NBU$, para todo $T > 0$.

Proposición 1

Si $X \in IFR$, entonces $\tau_{X,T} \in NBU$, para todo $T > 0$.

Clases de envejecimiento

Proposición 1

Si $X \in IFR$, entonces $\tau_{X,T} \in NBU$, para todo $T > 0$.

Proposición 2

$\tau_{X,T} \in DMRL$ si y solo si es exponencialmente distribuida.

Proposición 1

Si $X \in IFR$, entonces $\tau_{X,T} \in NBU$, para todo $T > 0$.

Proposición 2

$\tau_{X,T} \in DMRL$ si y solo si es exponencialmente distribuida.

Corolario 1

$\tau_{X,T} \in IFR$ si y solo si es exponencialmente distribuida.

Proposición 1

Si $X \in IFR$, entonces $\tau_{X,T} \in NBU$, para todo $T > 0$.

Proposición 2

$\tau_{X,T} \in DMRL$ si y solo si es exponencialmente distribuida.

Corolario 1

$\tau_{X,T} \in IFR$ si y solo si es exponencialmente distribuida.

Proposición 1

Si $X \in IFR$, entonces $\tau_{X,T} \in NBU$, para todo $T > 0$.

Proposición 2

$\tau_{X,T} \in DMRL$ si y solo si es exponencialmente distribuida.

Corolario 1

$\tau_{X,T} \in IFR$ si y solo si es exponencialmente distribuida.

Corolario 2

$\tau_{X,T} \in NBUE$ para todo $T \geq 0$ si y solo si $\mathbb{E}[\tau_{X,T}]$ es decreciente en T.

Proposición 3

i) $\tau_{X,T} \geq_{hr} X$, para todo $T \geq 0$, si y solo si $\dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x+y)}$ es creciente para $x \in [0, y]$ y todo $y \geq 0$.

ii) $\tau_{X,T} \geq_{lr} X$, para todo $T \geq 0$, si y solo si $\dfrac{f(x)}{f(x+y)}$ es creciente para todo $x \in [0, y]$ y para todo $y \geq 0$.

Proposición 3

i) $\tau_{X,T} \geq_{hr} X$, para todo $T \geq 0$, si y solo si $\dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x+y)}$ es creciente para $x \in [0, y]$ y todo $y \geq 0$.

ii) $\tau_{X,T} \geq_{lr} X$, para todo $T \geq 0$, si y solo si $\dfrac{f(x)}{f(x+y)}$ es creciente para todo $x \in [0, y]$ y para todo $y \geq 0$.

Corolario 3

i) Si $X \in IFR$, entonces $\tau_{X,T} \geq_{hr} X$ para todo $T > 0$.

ii) Si $X \in ILR$, entonces $\tau_{X,T} \geq_{lr} X$ para todo $T > 0$.

Órdenes estocásticos

[Jain, 2009]

- Si $X_1 \geq_{st} X_2$, entonces $\tau_{X_1,T} \geq_{st} \tau_{X_2,T}$, para todo $T > 0$.
- Si $X_1 \geq_{hr} X_2$, entonces $\tau_{X_1,T} \geq_{hr} \tau_{X_2,T}$, para todo $T > 0$.
- Si $X_1 \geq_{lr} X_2$, entonces $\tau_{X_1,T} \geq_{lr} \tau_{X_2,T}$, para todo $T > 0$.

[Jain, 2009]

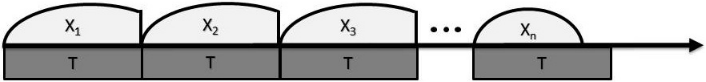
- Si $X_1 \geq_{st} X_2$, entonces $\tau_{X_1,T} \geq_{st} \tau_{X_2,T}$, para todo $T > 0$.
- Si $X_1 \geq_{hr} X_2$, entonces $\tau_{X_1,T} \geq_{hr} \tau_{X_2,T}$, para todo $T > 0$.
- Si $X_1 \geq_{lr} X_2$, entonces $\tau_{X_1,T} \geq_{lr} \tau_{X_2,T}$, para todo $T > 0$.

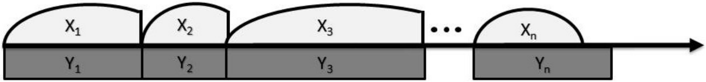
Proposición 4

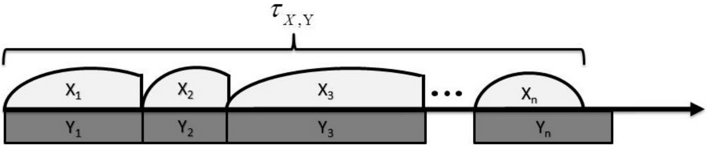
- Si $\overline{F}_1(T) \geq \overline{F}_2(t)$ y $X_1 \geq_{icv} X_2$, entonces
$$\tau_{X_1,T} \geq_{icv} \tau_{X_2,T}.$$
- Si $\overline{F}_1(T) \geq \overline{F}_2(t)$, $\mathbb{E}[\tau_{X_1,T}] \geq \mathbb{E}[\tau_{X_1,T}]$ y $X_1 \geq_{icv} X_2$, entonces
$$\tau_{X_1,T} \geq_{icx} \tau_{X_2,T}.$$

$T-$ aleatorio

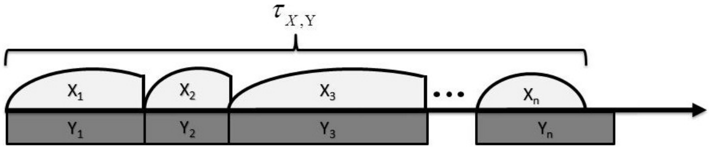
Modelo [Barlow and Proschan, 1981]




X_1
X_2
X_3
X_n
Y_1
Y_2
Y_3
Y_n



$\tau_{X,Y}$
X_1
X_2
X_3
...
X_n
Y_1
Y_2
Y_3
Y_n



Suposiciones

- X_i variables aleatorias no negativas i.i.d., para todo i.
- Y_i variables aleatorias no negativas i.i.d., para todo i.
- X_i y Y_j independientes para todos i y j.

Proposición 5

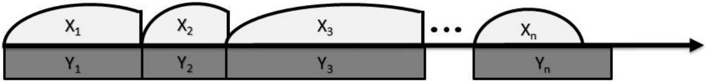
Si $X_1 \geq_{lr} X_2$, $Y_1 =_{st} Y_2$, entonces $\tau_{X_1,Y_1} \geq_{st} \tau_{X_2,Y_2}$.

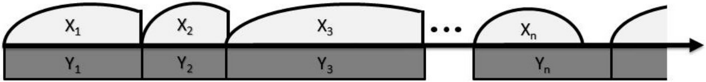
Proposición 5

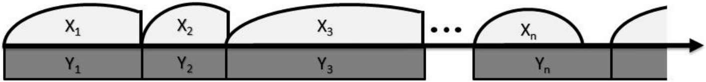
Si $X_1 \geq_{lr} X_2$, $Y_1 =_{st} Y_2$, entonces $\tau_{X_1,Y_1} \geq_{st} \tau_{X_2,Y_2}$.

Proposition 6

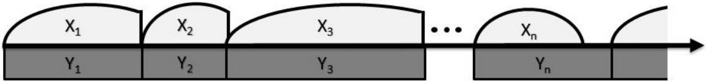
Si $X_1 =_{st} X_2$, $Y_1 \leq_{hr} Y_2$ y $X_1, X_2 \in IFR$, entonces $\tau_{X_1,Y_1} \geq_{lt} \tau_{X_2,Y_2}$.


X1
X2
X3
...
Xn
Y1
Y2
Y3
Yn

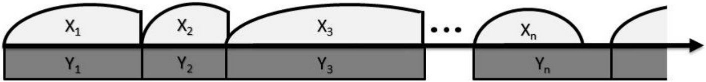

X_1
X_2
X_3
X_n
Y_1
Y_2
Y_3
Y_n



$$A_{X,Y} = \lim_{t\to\infty} P[\text{el sistema trabaja en el instante } t]$$



$$A_{X,Y} = \lim_{t \to \infty} P[\text{el sistema trabaja en el instante } t]$$



$$A_{X,Y} = \lim_{t \to \infty} P[\text{el sistema trabaja en el instante } t]$$

Proposición 7

Si $X_1 \geq_{icv} X_2$ y $Y_1 \leq_{icx} Y_2$, entonces $A_{X_1,Y_1} \geq A_{X_2,Y_2}$.

Bibliography

Weiss, G. H. (1956).
On the theory of replacement of machinery with a random failure time.
Naval Res. Logist. Qtuart., 3:279–293.

Jain, K. (2009).
Stochastic comparison of repairable systems.
American Journal of Mathematical and Management Sciences, 29(3-4):477–495.

Marshall, A. W. and Proschan, F. (1972).
Classes of distributions applicable in replacement, with renewal theory implications.
In Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, volume I3. University of California Press., 95–415.

Shaked, M. y Shanthikumar, J. G. (2007).
Stochastic orders.
Springer Science & Business Media.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981).
Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models.
To Begin With, Silver Spring, MD.

Comparaciones Estocásticas y Clases de Envejecimiento en Sistemas con Mantenimiento

José E. Valdés

Facultad de Matemática y Computación
Universidad de La Habana

vcastro@matcom.uh.cu

March 8, 2018